Algebraične krivulje

Hugo Trebše (hugo.trebse@gmail.com)

19. marec 2025

Kazalo

1 Algebraične krivulje in projektivnost

1.1 Algebraične krivulje

Definicija 1.1

Algebraična krivulja je množica ničel nekonstantnega polinoma v 2 spremenljivkah.

Definicija 1.2

Za vsak polinom $F \in \mathbb{C}[X, Y]$ definiramo množico njegovih ničel kot

$$V(F) = \{(a, b) \in \mathbb{C}^2 \mid F(a, b) = 0\}$$

Trditev 1.3

Velja, da je

$$V(FG) = V(F) \cup V(G)$$

Definiramo stopnjo polinoma kot maksimalno stopnjo monoma, stopnjo monoma pa kot vsoto stopenj potenc spremenljivk.

Komentar 1.4

Kot opomba dodamo, da v kolobarju $\mathbb{C}[X, Y]$ nimamo istih algebraičnih lastnosti kot v kolobarju $\mathbb{C}[X]$, saj bazni kolobar $\mathbb{C}[X]$ ni polje. V specifičnem primeru nimamo evklidovega izreka o deljenju polinomov. Še zmeraj pa velja izrek o enolični faktorizaciji ter dejstvo, da $\mathbb{C}[X, Y]$ nima deliteljev niča.

Kaj pa če imamo dano množico in želimo najti polinom, katera množica ničel je slednja? Enoličnost takega polinoma ni zagotovljena.

Definicija 1.5

Podmnožica $C \subseteq \mathbb{C}^2$ je nerazcepna algebraična krivulja, če obstaja tak nerazcepen, nekonstanten polinom $F \in \mathbb{C}[X, Y]$, da je

$$V(F) = C$$

Opazimo, da $f \mid g \implies V(f) \subseteq V(g)$.

Izrek 1.6: Nullstellensatz / Studyjeva lema

Če je f nerazcepen in če velja $V(f) \subseteq V(g)$, potem $f \mid g$

Posledice Nullstellensatza:

Trditev 1.7

Vsaka algebraična krivulja je neprazna.

Dokaz. Denimo $V(f) = \emptyset$. Potem za nerazcepen faktor h polinoma f velja $V(h) = \emptyset$. Tako je $V(h) = \emptyset \subseteq V(h+1) \implies h \mid h+1 \implies h$ konstanten. □

V kolikšni meri algebraična krivulja določa svoj polinom? Če je $C = V(f)$ in $C = V(g)$ kakšna je povezava med f in g?

Trditev 1.8

Če je $V(f) = V(g)$ za neka nekonstantna $f, g \in \mathbb{C}[X,Y]$, potem imata f in g iste nerazcepne faktorje.

Dokaz. Pokažemo, da $V(f) \subseteq V(g)$ implicira, da ima g vse nerazcepne faktorje f. Sledi po Nullstellensatzu. □

Trditev 1.9

Vsako krivuljo se da na en sam način zapisati kot unijo nerazcepnih faktorjev.

Dokaz. Posledica zgornjih dveh trditev. □

Definicija 1.10

Produktu nerazcepnih faktorjev pravimo *minimalni polinom* krivulje C.
Iz enoličnosti (do konstante natančno) minimalnega polinoma sledi, da je definicija *stopnje krivulje* kot stopnje njenega minimalnega polinoma dobra.

1.1.1 Dokaz Nullstellensatza

Za dokaz Nullstellensatza (Studyjeve leme) potrebujemo nekaj pomožnih trditev. Definirali bomo rezultanto dveh polinomov ter pokazali, da je enaka nič natanko tedaj, ko imata nekonstanten skupni faktor.

Delali bomo v večji splošnosti, namreč opazovali bomo $\mathbb{C}[X,Y] = \mathbb{C}[Y][X] = A[X]$, kjer je A komutativen kolobar z enoto, brez deliteljev niča, ter z enolično faktorizacijo na nerazcepne faktorje.

$f, g \in A[X]$,

$$f(X) = a_0 X^m + \ldots + a_m$$
$$g(X) = b_0 X^n + \ldots + b_n$$

Definrajmo rezultanto polinomov kot:

$$Res(f,g) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{m-1} & a_m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{m-n} & a_{m-n+1} & \dots & a_m \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_n & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_{n-1} & b_n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_0 & b_1 & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

Imamo tehnične težave, saj je determinanta nad celim kolobarjem (ne poljem), tako ne velja nujno dejstvo o invertibilnosti in linearni neodvisnosti vrstic/stolpcev ob neničelnosti determinante. To popravimo tako, da A vložimo v njegovo polje ulomkov. Če pomnožimo z imenovalci ulomkov nad poljem ulomkov tako nazaj dobimo želeni dejstvi.

Trditev 1.11

Naslednje izjave so ekvivalentne.

- $Res(f,g) = 0$.
- $\exists\, \varphi, \psi \in A[X]$, ki nista oba enaka 0, da je

$$\varphi f + \psi g = 0.$$

- f, g imata skupen nekonstanten faktor.

Dokaz. Kdaj je $Res(f,g) = 0$? Natanko tedaj, ko so vrstice $(m+n) \times (m+n)$ matrike linearno neodvisne nad poljem ulomkov A. Hitro dobimo, da je slednje ekvivalentno obstaju $\psi, \varphi \in A[X]$, $\deg(\varphi) < \deg(g)$ ter $\deg(\psi) < \deg(f)$, da je

$$\varphi f + \psi g = 0.$$

Iz pogoja o stopnjah sledi, da imata f in g skupni faktor. Implikacija v drugo smer je očitna po izbiri $\varphi = \frac{g}{\gcd(f,g)}$ ter $\psi = \frac{-f}{\gcd(f,g)}$ □

S to pomožno trditvijo dokažemo Studyjevo lemo. Naj sta $f = \sum a_i X^{m-1}$ ter $g = \sum b_i X^{n-i}$, kjer so $\{a_i\}$ ter $\{b_i\}$ elementi $\mathbb{C}[Y]$. Ker je $a_0 \neq 0$ obstaja y_0, da je $a_0(y_0) \neq 0$. Naj bo $f_{y_0}(x) = f(x, y_0)$. Zaradi algebraične zaprtosti $\mathbb{C}$ ima ta polinom ničlo x_0. Sledi, da je $(x_0, y_0) \in V(f) \subseteq V(G)$. Sledi, da je rezultanta f_{y_0} ter g_{y_0} ničelna, saj imata oba ničlo x_0. Tako sledi, da je y_0 ničla rezultante $Res(f,g)$. Ker to velja za skoraj vse y_0 (tiste vrednosti v katerih $a_0(y_0) \neq 0$) sledi, da je $Res(f,g) = 0$.

1.2 Vaje

1.2.1 Parametrizacija

Imamo krivuljo $C \in \mathbb{A}^2$ v afini ravnini. Želimo najti parametrizacijo $r : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$

$$t \mapsto (x(t), y(t)),$$

da je $r(\mathbb{C}) = C$.

Definicija 1.12

Parametrizaciji množice (če obstaja) pravimo racionalna parametrizacija, če velja:

- Za vse razen končno mnogo kompleksnih števil racionalni funkciji $x(t), y(t)$ zadoščata $f(x(t), y(t)) = 0$, kjer je f polinom, za katerega velja $C = V(f)$
- Za vse razen končno mnogo (x, y), ki zadoščajo $f(x, y) = 0$ obstaja enoličen t, da velja $(x, y) = (x(t), y(t))$.

Primer 1.13

Parametrizirajmo krožnico $x^2 + y^2 = 1$ v $\mathbb{R}^2$.

Rešitev. Odstranimo točko $(-1, 0)$ ter izvajamo stereografsko projekcijo, kjer vzamemo za parameter t strmino premice. Ker točka (x, y) leži na premici skozi $(-1, 0)$ velja $y = t(x + 1)$, ker pa je točka (x, y) na krožnici velja $x^2 + y^2 = 1$. Dobimo:

$$\begin{aligned} x^2 + t^2(x + 1)^2 - 1 &= 0 \\ x^2(t^2 + 1) + 2t^2x + t^2 - 1 &= 0 \\ (x + 1)(x - 1 + t^2(x + 1)) &= 0 \\ x &= \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \end{aligned}$$

kjer smo faktorizacijo opazili, saj imamo gotovo tudi rešitev $x = -1$ iz geometrijske strukture problema. Parametrizacija je tako

$$t \mapsto \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \frac{2t}{1 + t^2}\right)$$

□

Primer 1.14

V $\mathbb{R}^2$ poišči racionalno parametrizacijo hiperbole

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Rešitev. Tvorimo premice skozi točko $(-a, 0)$, kjer je parameter t strmina slednje. Velja $y = t(x + a)$ ter $x^2 - y^2 - a^2 = 0$.

$$x^2 - t^2(x + a)^2 = a^2$$
$$(x + a)\left(x - a - t^2(x + a)\right) = 0$$
$$x = a\frac{1 + t^2}{1 - t^2}$$

kjer smo pri faktorizaciji ponovno opazili ničlo $x = -a$ iz geometrijske strukture problema. Racionalna parametrizacija je tako

$$t \mapsto \left(a\frac{1 + t^2}{1 - t^2}, a\frac{-2t}{1 - t^2}\right).$$

□

Primer 1.15

V $\mathbb{R}^2$ parametriziraj Descartesov list $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

Rešitev. Premice skozi $(0, 0)$ so oblike $y = tx$.

$$x^3 + t^3x^3 - 3tx^2 = 0$$
$$x^2\,(x + tx - 3t) = 0$$
$$x = \frac{3t}{1 + t^3}$$

Racionalna parametrizacija je tako:

$$t \mapsto \left(\frac{3t}{1 + t^3}, \frac{3t^2}{1 + t^3}\right)$$

□

Zgornji postopek je posplošljiv, če na krivulji obstaja točka, za katero velja, da vse premice skozi to točko sekajo krivuljo v natanko eni drugi točki. Očitno so množice ničel polinomov stopnje največ 2 ustrezne. Descartesov list pa smo lahko parametrizirali, saj smo izbrali točko $(0, 0)$, ki ni gladka - krivulja tam nima polnega ranga.

1.2.2 Nerazcepnost

Trditev 1.16

Kolobar $\mathbb{C}[X, Y]$ ima enolično faktorizacijo. To pomeni, da lahko zapišemo

$$f = f_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot f_n^{k_n}.$$

Dokaz. $\mathbb{C}[X, Y]$ ni evklidski kolobar, saj ideal $\langle x, y\rangle$ ni glavni. Enolično faktorizacijo pokažemo z minimalnim protiprimerom na stopnji nerazcepnih faktorjev. □

Definicija 1.17

Naj bo I aditivna podgrupa kolobarja K. Množici I pravimo *ideal*, če $\forall a \in K$ velja

$$aI = Ia = I.$$

Trditev 1.18

Če sta I, J ideala kolobarja K so ideali tudi

- $I + J = \{i + j \mid i \in I \wedge j \in J\}$
- $I \cap J$
- $IJ =$ aditivna podgrupa generirana z $\langle ij \mid i \in I \wedge j \in J\rangle$.

Trditev 1.19: Klasifikacija maksimalnih idealov

Maksimalni ideali naslednjih kolobarjev so:

- V $\mathbb{C}[X]$ so vsi maksimalni ideali oblike $\langle x - t\rangle$,
- V $\mathbb{C}[X, Y]$ so vsi maksimalni ideali oblike $\langle x - a, y - b\rangle$.

Definicija 1.20

Ideal I je *praideal*, če iz $ab \in I$ sledi, da je $a \in I$ ali $b \in I$.

Trditev 1.21

V kolobarjih z enolično faktorizacijo praelementi ter nerazcepni elementi sovpadajo.

Komentar 1.22

Obstaja naslednja korespondenca med algebro in geometrijo:

$$\begin{gathered}\mathbb{A}^2 \longleftrightarrow \mathbb{C}[X, Y] \\ \text{točke } (a, b) \longleftrightarrow \text{maksimalni ideali } (x - a, y - b) \\ \text{nerazcepne krivulje} \longleftrightarrow \text{praideali}\end{gathered}$$

V luči tega podamo naslednji kriterij:

Izrek 1.23: Eisensteinov kriterij

Naj bo

$$Q(X) = \sum_{i=1}^{m} a_i X^i,$$

kjer so $a_i \in \mathbb{C}[Y]$. Polinom $Q \in \mathbb{C}[X, Y]$ je *nerazcepen*, če obstaja tak nerazcepen polinom $p \in \mathbb{C}[Y]$ (kot posledica osnovnega izreka algebre je $p(Y) = Y - \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$), da velja

$$\begin{gathered} a_i \in \langle p \rangle \quad \forall i \neq m \\ a_m \notin \langle p \rangle \\ a_0 \notin \langle p^2 \rangle \end{gathered}$$

Primer 1.24

$Q = x^2y - y^2x + x + y - 1 = (y)x^2 + (1 - y^2)x + (y - 1)$.

Oris dokaza. $p(y) = y - 1$ □

Nasvet : Kako pokazati nerazcepnost polinoma?

- Namesto, da opazujemo Q kot polinom nad $\mathbb{C}[Y]$ ga lahko opazujemo tudi kot polinom nad $\mathbb{C}[X]$, kar lahko vodi do dodatne uporabe Eisensteinovega izreka.
- Za dokazovanje nevsebovanosti polinoma v idealu uporabimo protislovje s stopnjo polinoma ali pa protislovje z večkratnostjo ničel polinoma.
- V primeru, da Eisensteinov kriterij ne pokaže nerazcepnosti imamo dve opciji:
  - † S protislovjem po definiciji: zapišemo dva polinoma ter uporabljamo znane lastnosti kolobarjev polinomov.
  - † Pokažemo celost kvocientnega kolobarja.

Primer 1.25

Pokaži, da je polinom $y^2 - x^3$ nerazcepen.

Rešitev. Upamo, da je

$$\mathbb{C}[X, Y]/\langle y^2 - x^3 \rangle \cong \mathbb{C}[t^2, t^3] \subseteq \mathbb{C}[t].$$

Izkaže se, da je $\varphi : p(x, y) \mapsto p(t^2, t^3)$ ustrezen homomorfizem. □

2 Projektivno zaprtje

Cilj je dokazati Bezeoutov izrek. Doslej smo se ukvarjali z afino ravnino $\mathbb{F}^2$, kjer je $\mathbb{F}$ polje. Odslej delamo v projektivni ravnini, ki sestoji iz vseh premic v $\mathbb{F}^3$, ki potekajo skozi izhodišče.

Projektivne koordinate točk so oblike (x, y, z), ker pa obravnavamo ekvivalenčni razred premic velja $(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$ - ta koordinata predstavlja premico skozi $(0, 0, 0)$ ter (x, y, z). Ob tej predpostavki dodamo, da niso vse izmed koordinat (x, y, z) ničelne.

Želimo $2D$ model za projektivno ravnino.

1. *Sferični model* ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$). Vzamemo enotsko sfero v $\mathbb{R}^3$, ter indetificiramo antipodne točke. Kvocientni prostor je projektivna ravnina.

2. *Afini model* projektivne ravnine (deluje za vsa polja $\mathbb{F}$). Premice v $\mathbb{F}^3$ skozi izhodišče identificiramo s točkami v ravnini $z = 1$, preko ekvivalenčne relacije
$$(x, y, z) = z(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1).$$
Če pa premica (x, y, z) ne seka ravnine $z = 1$, potem tako točko imenujemo *projektivna točka v neskončnosti.* Tako točko si preedstavljamo kot šop vzporednih premic v ravnini $z = 1$ (ki so vzporedne tej projektivni točki)

Povzetek: Afini model prjektivne ravnine si predstavljamo kot ravnino $z = 1$. Točkam v ravnini $z = 1$ ustrezajo končne projektivne točke, neskončne projektivne točke pa si predstavljamo kot šope vzporednih premic.

$$\text{projektivna ravnina } p^2(\mathbb{F}) = \mathbb{F}^2 \cup \text{točke v neskončnosti.}$$

Vložitev afine ravnine v projektivno ravnino:

$$i : \mathbb{F}^2 \to p^2(\mathbb{F})$$
$$(a, b) \mapsto (a : b : 1)$$

Projektivne premice v $p^2(\mathbb{F})$ so ravnine v $\mathbb{F}^3$, ki gredo skozi izhodišče. Enačba ravnine skozi izhodišče je $ax + by + cz = 0$.

projektivna premica $ax+by+cz = 0 \longleftrightarrow$ unija vseh običajnih premic, ki so pravokotne na (a, b, c).

- *Sferični model:* Projektivne premice so glavni korgi enotske sfere.
- *Afini model:* Projektivno premico sekamo z ravnino $z = 1$. Projektivni premici $ax + by + cz = 0$ tako ustreza premica $ax + by + c = 0$.

Poiščimo projektivno premico skozi dani projektivni točki $(x_1 : y_1 : z_1)$ in $(x_2 : y_2 : z_2)$. Njena enačba je

$$det \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

Poiščimo presečišče dveh projektivnih premic $a_1x + b_1y + c_1z = 0$ ter $a_2x + b_2y + c_2z = 0$. $\vec{n_1} = (a_1, b_1, c_1)$ ter $\vec{n_2} = (a_2, b_2, c_2)$. Potem je presečišče $\vec{n_1} \times \vec{n_2}$.

2.1 Projektivne algebraične krivulje

Definicija 2.1

Polinom $F \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ je *homogen*, če so vsi njegovi monomi iste stopnje.

Definicija 2.2

Za vsak homogen polinom lahko definiramo množico njegovih projektivnih ničel kot

$$V_h(F) = \{(a : b : c) \in p^2(\mathbb{C}) \mid F(a, b, c) = 0\}$$

Homogenost polinoma potrebujemo, ker želimo dobro definiranost ničle polinoma.

Definicija 2.3

Podmnožica $C \subset p^2(\mathbb{C})$ je *projektivna algebraična krivulja*, natanko tedaj, ko obstaja tak nekonstanten homogen polinom $F \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$, da velja

$$C = V_h(F).$$

Iz projektivne algebraične krivulje dobimo afino algebraično krivuljo tako, da jo sekamo z ravnino $z = 1$:

$$F(x, y, z) = 0 \mapsto F(x, y, 1) = 0$$

Zgornji substituciji $z = 1$ pravimo *dehomogenizacija* homogenega polinoma F.

Kaj pa obravno? Kako iz afine algebraične krivulje dobimo projektivno algebraično krivuljo?

Začnemo z afino algebraično krivuljo $f(x, y) = 0$ v ravnini $z = 1$. Ravnino $z = 1$ vložimo v projektivno ravnino. Kako se pri tej vložitvi slika naša afina algebraična krivulja?

Želeli bi dobiti $V_h(F)$, kjer je F *homogenizacija* polinoma f, definirana kot

$$F(x, y, z) = z^{\deg f} \cdot f(\frac{x}{z}, \frac{y}{z})$$

Dobili bomo

$$i(V(f)) = \text{končne točke v } V_h(F)$$

Definicija 2.4

$V_h(F)$ je *projektivno zaprtje* $V(f)$

Trditev 2.5

Za afino algebraično krivuljo $V(f)$ velja, da je

$$i(V(f)) = \text{končne točke v } V_h(F)$$

Dokaz.

$$V(f) = \{(a,b) \in \mathbb{C}^2 \mid f(a,b) = 0\} \implies i(V(f) = \{i(a,b) \in p^2(\mathbb{C}) \mid f(a,b) = 0\} =$$
$$\{(a:b:1) \in p^2(\mathbb{C}) \mid f(a,b) = 0\} = \{(\frac{a}{c} : \frac{b}{c} : 1) \in p^2(\mathbb{C}) \mid c \neq 0 \wedge f(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}) = 0\}$$
$$= \{(a:b:c) \in p^2(\mathbb{C}) \mid c \neq 0 \wedge c^{\deg f} f(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}) = 0\} = \{(a:b:c) \in p^2(\mathbb{C}) \mid c \neq 0 \wedge F(a,b,c) = 0\} =$$
$$\{(a:b:c) \in p^2(\mathbb{C}) \mid c \neq 0\} \cap \{(a:b:c) \in p^2(\mathbb{C}) \mid F(a,b,c) = 0\}$$

Zadnji presek pove, da je začetna množica resnično enaka končnim točkam v $V_h(F)$. □

2.2 Vaje

2.2.1 Projektivnost

Primer 2.6

$C = V(y^2 - x^2 + x^4)$. Poiščite presečno večkratnost v izhodišču množice C s poljubno premico skozi izhodišče.

Rešitev. Premice skozi izhodišče so $y = tx$. Dobimo

$$0 = t^2x^2 - x^2 + x^4 = x^2(t^2 - 1 + x^2).$$

Sledi, da je za $|t| \neq 1$ presečna večkratnost 2, v primeru $t \in \{-1, 1\}$ pa je presečna večkratnost 4. $\square$

Ideja presečne večkratnosti je to, da lahko identificiramo tangente glede na to, da je presečna večkratnost več kot 1.

Komentar 2.7

Definiramo $\mathbb{P}^2 = \mathbb{C}^3/\sim$, kjer je $\sim$ ekvivalenčna relacija ležanja na isti premici. Točke v $\mathbb{P}^2$ so premice, ki potekajo skozi izhodišče v $\mathbb{C}^3$. Naj bo Φ obrnljiva linearna preslikava v $\mathbb{C}^3$. Φ slika premice, ki potekajo skozi izhodišče v druge premice skozi izhodišče. Tako Φ porodi bijekcijo iz $\mathbb{P}^2$ v $\mathbb{P}^2$, ki ji rečemo *projektivnost*.

Primer 2.8

Poišči projektivnost, ki preslika točke iz $\mathbb{P}^2$ v $\mathbb{P}^2$, ter

$$\begin{gathered}
(1:1:0) \mapsto (0:-1:0)\\
(1:0:1) \mapsto (1:0:-2)\\
(1:-1:0) \mapsto (1:1:0)\\
(1:0:-1) \mapsto (1:0:-1)
\end{gathered}$$

Rešitev. Naj bo

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{ter} \quad B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Iščemo $X \in \mathbb{C}^{3\times 3}$, da je $X \cdot A = B$. Prevedemo problem na $A^T \cdot X = B^T$ ter tvorimo matriko $[A^T \mid B^T]$ ter delamo Gaussovo eliminacijo, da dobimo X.

Ko gledamo, če se matrika X na želen način obnaša pri četrti vrednosti opazimo, da to ne velja. Ker so projektivne točke definirane do konstantega večkratnika natančno pravzaprav rešujemo sistem $X \cdot A = C$, kjer je

$$C = \begin{vmatrix} 0 & b & c \\ -a & 0 & c \\ 0 & -2b & 0 \end{vmatrix}$$

□

Primer 2.9

Poišči projektivnost $\mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$, ki preslika točke

$$\begin{gathered} (0{:}1{:}\text{-}1) \mapsto (1:0:0) \\ (1{:}0{:}0) \mapsto (0:1:0) \\ (2{:}\text{-}1{:}0) \mapsto (0:0:1) \\ (1{:}\text{-}2{:}1) \mapsto (1:1:1) \end{gathered}$$

Rešitev. To je ekvivalentno iskanju matrike X (do sklarnega večkratnika natančno), da velja $X \cdot A = B$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ter} \quad B = I.$$

Zapišemo razširjeno matriko sistema, ki jo dobimo po transponiranju želene enakosti

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & c \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & 1 & -a & 0 & -c \end{vmatrix} \implies X = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & -c & -c \end{vmatrix},$$

kar sledi po transponiranju. Da matrika pravilno preslika vektor $[1, -2, 1]^T$ določimo $a = -1, b = 1$ ter $c = 1$. □

Homogenizacija polinomov $f \in \mathbb{C}[X, Y]$ polinom stopnje n, tako je

$$f(X, Y) = f_0(x, y) + \ldots + f_n(x, y), \text{ kjer je } \deg(f_i) = i \;\; \forall 0 \leq i \leq n.$$

Polinom f homogeniziramo tako

$$F(x, y, z) = f_0(x, y)z^n + f_1(x, y)z^{n-1} + \ldots + f_n(x, y,)$$

ki je homogen polinom stopnje n.

V $\mathbb{P}^2$ velja $(a : b : c) = z(a : b : c)$, $z \neq 0$. Če želimo imeti krivuljo v $\mathbb{P}^2$, ki je podana kot množica ničel nekega polinoma, potem mora biti ta polinom homogen, saj drugače ne bi bil celotni ekvivalenčni razred točke $(a : b : c)$ ničelen na polinomu.

Primer 2.10

Izračunajte rezultanto polinomov $F = z^3 + z^2(x+y) - zy^2 - yx^2$ ter $G = z^2 - yz - xy$.

Rešitev.

$$\mathrm{Res}_z(F,G) = \begin{vmatrix} 1 & x+y & -y^2 & -y^2x & 0 \\ 0 & 1 & x+y & -y^2 & -y^2x \\ 1 & -y & -xy & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -y & -xy & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -y & -xy \end{vmatrix} = xy \begin{vmatrix} 1 & x+y & -y^2 & -y \\ -x-2y & -xy+y^2 & y^2x & 0 \\ 1 & -y & -xy & 0 \\ 0 & 1 & -y & -1 \end{vmatrix} =$$

$$xy \cdot \frac{1}{y} \begin{vmatrix} 1 & x+y & -y^2 & -y \\ -x-2y & -xy+y^2 & xy^2 & 0 \\ 0 & x-2y & y^2-xy & y \\ 0 & -x & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-x^2)y^2 \begin{vmatrix} 1 & -y & -1 \\ -x-2y & xy & 0 \\ 0 & y-x & 1 \end{vmatrix} = x^4y^2$$

Najprej smo od tretje vrstice odšteli prvo in razvili po minorju, nato smo od tretje vrstice odšteli prvo ter od $y\cdot$ četrte vrstice odšteli prvo vrstico ter razvili po zadnji vrstici, nato pa smo samo izračunali determinanto 3×3 matrike. □

Primer 2.11

Poiščite presek projektivnih krivulj podanih z $F = xz^2 - y^2(x+y) = 0 = -y^3 - y^2x + 0y + xz^2$ ter $G = y^2 + xy + z^2 = 0$

Rešitev. Najdemo točko, ki ne leži na nobeni krivulji. Prvotni kandidati za to so $(1:0:0), (0:1:0)$ ter $(0:0:1)$. V našem primeru je to $(0:1:0)$. Izračunamo rezultanto polinomov glede na y (ustrezna spremenljivka glede na koordinato).

$$\mathrm{Res}_y(F,G) = z^6.$$

Presek polinoma stopnje 3 z polinomom stopnje 2 ima pričakovano večkratnost 6.

Pogledamo presek $z = 0$ (to je namreč edina ničla rezultante) z $F = 0$ ter $G = 0$. Tako velja

$$G(x,y,0) = y^2 + xy = y(y+x) = 0 \implies (1:0:0), (1:-1:0) \text{ sta v preseku,}$$

kar potrdi izračun ničel $F(x,y,0)$.

Želimo si izbrati točko, ki ne leži na nobeni izmed krivulj in tudi ne leži na nobeni premici, ki poteka skozi presečišča krivulj. Ker je $(0:1:0) = (1:0:0) - (1:-1:0)$ naša izbira točke ni bila posrečena.

Izberemo si $(1:0:1)$. Rabimo projektivnost, ki preslika točko $(1:0:1) \mapsto (x:y:z) \in \{(1:0:0),(0:1:0),(0:0:1)\}$.

Iz čistega veselja definiramo projektivnost

$$
\begin{aligned}
(1:0:1) &\mapsto (0:0:1) \\
(1:0:0) &\mapsto (1:0:0) \\
(1:-1:0) &\mapsto (0:1:0)
\end{aligned}
$$

Transponiranje ter mešanje vrstic skuha projektivnost

$$
Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Če matriko Q uporabimo na polinomih $\square$

Literatura

[1] prof. dr. Jaka Cimprič. *Predavanja iz predmeta Algebraične krivulje*. 2025.

[2] asist. dr. Matej Filip. *Vaje iz predmeta Algebraične krivulje*. 2025.