

Splošna topologija

Hugo Trebše (hugo.trebse@gmail.com)

26. oktober 2024

Kazalo

1	Topološki prostori ter zvezne funkcije	3
2	Zvezne preslikave	5
3	Homeomorfizmi	7
4	Baze in podbaze	9
5	Konstrukcije topoloških prostorov	11
5.1	Produktna topologija	11

1 Topološki prostori ter zvezne funkcije

Iz metričnih prostorov vemo: $f : (X, d_x) \rightarrow (Y, d_y)$ je zvezna, če je za vsako odprto množico $U \subseteq Y$ njena praslika $f^{-1}(U)$ odprta v X . $U \subseteq X$ je odprta, če so vse točke U notranje. Točka $x \in U$ je notranja, če obstaja $r > 0$, da je $K(x, r) \subseteq U$.

V topologiji namesto opisovanja odprtih množic glede na druge pogoje predpišemo, katere množice so odprte.

Opomnimo se še naslednjega dejstva o odprtih množicah: v metričnem prostoru je množica odprta, natanko tedaj, ko jo lahko zapišemo kot unijo odprtih krogel.

Z hitrim premislekom pridemo do ugotovitve, da lahko odprto množico v eni metriki zapišemo kot unijo odprtih krogel v drugi metriki.

Definicija 1.1: Topologija

Topologija na množici X je družina množic $\mathcal{T} \subseteq X$, ki zadošča pogojem:

- (T0) $\emptyset \in \mathcal{T}$ ter $X \in \mathcal{T}$.
- (T1) Poljubna unija elementov \mathcal{T} je element \mathcal{T} .
- (T2) Poljuben končni presek elementov \mathcal{T} je element \mathcal{T} .

Elemente \mathcal{T} imenujemo odprte množice. *Topološki prostor* je množica X z neko topologijo (X, \mathcal{T}) .

Pogoj (T0) pravzaprav sledi iz pogojev (T1) in (T2) z presekom ter unijo prazne družine.

Bližina točk pravzaprav meri kako težko je ločiti dve točki, kar motivira topologijo.

Primer 1.2

Metrika porodi topologijo: (X, d) metrični prostor in $\mathcal{T}_d = \{\text{vse unije odprtih krogel}\}$.

Oris dokaza. Unija unij krogel je seveda unija krogel, kar zadosti pogoju (T1). Pogoj (T2) dokažemo za presek dveh krogel, z indukcijo za končno mnogo. Presek odprtih krogel je odprta množica, zato unija odprtih krogel. \square

Definicija 1.3

Topologija je *metrizabilna*, če je porojena z neko metriko.

Primer 1.4

Če je (X, d) metrični prostor je tudi (X, d') metrični prostor, kjer je

$$d'(x, y) = \min \{d(x, y), 1\}.$$

Velja, da je $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d'}$, kjer vzamemo standardno topologijo porojeno z metriko. Posledično lahko različne metrike porodijo isto topologijo.

Definicija 1.5

Topologijo $\mathcal{T}_{\text{triv}} = \{\emptyset, X\}$ imenujemo *trivialna topologija*, topologijo $\mathcal{T}_{\text{disc}} = \mathcal{P}(X)$ pa *diskretna topologija*.

Primer 1.6: Metrizablenost trivialne in diskretne topologije

Mar sta te topologiji metrizableni? Za trivialno topologijo to ne velja, če ima le X vsaj dva elementa. Temu je tako, ker imata vsaki točki v metričnem prostoru disjunktni okolici - obstaja taka okolica ene točke, ki ne vsebuje druge točke. Za diskretno topologijo pa je odgovor da, saj jo porodi diskretna metrika:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{če } x = y \\ 1, & \text{če } x \neq y \end{cases}$$

Vsak element $x \in X$ je namreč vsebovan v odprti krogli $K(x, \frac{1}{2})$, posledično lahko dobimo vsak element $\mathcal{T}_{\text{disc}}$ z unijami.

Definicija 1.7

$\text{Int}(A) = \bigcup \{U \in \mathcal{T} \mid U \subseteq A\}$ je največja odprta podmnožica množice A . Pravimo, da je A *zaprta*, če je $A^T \in \mathcal{T}$. Definiramo tudi *zaprtje* množice A kot $\text{Cl}(A) = \overline{A} = \bigcap \{A \subset Z\}$. Le-ta je najmanjša zaprta množica, ki vsebuje A .

Primer 1.8

Na množici X lahko definiramo topologijo $\mathcal{T}_{\text{kk}} = \{U \subseteq X \mid X \setminus U \text{ je končna}\} \cup \emptyset$, ki ji pravimo *topologija končnih komplementov*. Isto topologijo dobimo, če razglasimo vse elemente X za zaprte množice.

Definiramo tudi *mejo* množice A kot $\text{Fr}(A) = \text{Cl}(A) \setminus \text{Int}(A)$. Ta ni enaka robu množice ter je venomer zaprta, saj je $\text{Fr}(A) = \text{Cl}(A) \cup (X \setminus \text{Int}(A)) = \text{Cl}(A) \cup \text{Int}(A)^c$.

2 Zvezne preslikave

Definicija 2.1

Preslikava $f : X \rightarrow Y$ je *zvezna*, če velja $f^{-1}(\mathcal{T}_Y) \subseteq \mathcal{T}_X$.

To je seveda le znani pogoj o odprtosti preslik odprtih množic.

Obstajajo topologije, ki zagotovijo zveznost vseh funkcij.

Primer 2.2

- Če je \mathcal{T}_Y trivialna je f venomer zvezna.
- Če je \mathcal{T}_X diskretna je f venomer zvezna.

Poetično se lahko izrazimo če je topologija domene bogata glede na topologijo kodomene, potem je f zvezna.

Trditev 2.3

Konstantna funkcije je zvezna ne glede na topologijo.

Oris dokaza. Če je $f(X) = y_0$ in je $U \in \mathcal{T}_Y$ velja

$$f^{-1}(U) = \begin{cases} X & | y_0 \in U \\ \emptyset & | y_0 \notin U \end{cases}$$

□

Ali obstaja kakšna topologija, da velja obratno?

Primer 2.4

$f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{kk}}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{evk}})$ je nezvezna, če je nekonstantna.

Oris dokaza. \mathcal{T}_{kk} ne vsebuje disjunktne neprazne množice. **Disjunktne množice imata disjunktne preslikave.** Ker topologija kodomene vsebuje disjunktne množice smo končali. □

Pravzaprav lahko zgornji zgled posplošimo na neobstoje zvezne nekonstantne funkcije $g : (X, \mathcal{T}_{\text{kk}} \rightarrow (Y, \mathcal{T}))$, kjer je \mathcal{T} metrabilna ter X neskončna.

Vpeljemo oznako za množico zveznih preslikav med topološkima prostoroma: $C((X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)) = C(X, Y)$. Pogosto pišemo: $C((X, \mathcal{T}_X), (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{evk}})) = C(X)$. V topološkem kontekstu pogosto uporabimo izraz prostor za topološki prostor ter preslikava za funkcijo, ki je zvezna glede na izbrano topologijo.

Trditev 2.5

- Kompozitum zveznih funkcij je zvezna.
- Naslednje trditve so ekvivalentne:
 - † f je zvezna.
 - † prasluka vsake zaprte množice je zaprta.
 - † $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Oris dokaza. Velja $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ ter $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$. Ker je $A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$ ter ker je zaprtje A gotovo znotraj zaprte množice na desni sledi $\overline{A} \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$. Naj bo B zaprta. Velja $f(\overline{f^{-1}(B)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(B))} \subseteq \overline{B} = B$. To pokaže, da je zaprtje prasluka podmnožica prasluka, kar dokaže želeno. \square

Zadnja karakterizacija je topološka analogija znane karakterizacije z konvergenco funkcijskih vrednosti ter funkcijsko vrednostjo limite. Elementi roba so namreč na nek način limite zaporedij. Prednost zadnje karakterizacije je tudi to, da se nam pri eksplicitno podani funkciji f ni treba ukvarjati z računanjem prasluka.

Primer 2.6

Omenimo dve »znani« topologiji.

- Naj bo $x \in X$. $\mathcal{T}_{VT} = \{U \subseteq X \mid x \in U \vee X = \emptyset\}$. To topologijo imenujemo *topologija vsebovane točke*.
- *Prostor Sierpinskega* je topologija na dveh točkah, kjer je razen prazne in polne množice odprta le ena izmed točk.

3 Homeomorfizmi

Definicija 3.1

$f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ je *homeomorfizem*, če je

- f je bijekcija med X in Y .
- f_* (preslikava med \mathcal{T}_X in \mathcal{T}_Y) je bijekcija.

Trditev 3.2

Za $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ so ekvivalentne naslednje trditve:

- f je homeomorfizem.
- f je bijekcija, f ter f^{-1} sta zvezni.
- f je bijekcija, zvezna in *odprta* - slika vsake odprte množice je odprta.
- f je bijektivna, zvezna in *zaprta* - slika vsake zaprte množice je zaprta.

Homeomorfnost je ekvivalenčna relacija.

Nekatere zvezne funkcije so avtomatično zaprte oz. odprte. Primer je

$$f^{\text{zv.}} : X^{\text{komp.}} \rightarrow Y^{\text{metr.}}$$

Primer 3.3

Inverz zvezne funkcije ni nujno zvezen. Obravnavamo naravno preslikavo iz

$$[0, 1) \cup \{2\} \rightarrow [0, 1].$$

Preslikava je zvezna, a njen inverz ni.

Vsak končen interval na \mathbb{R} je homeomorfen enemu izmed intervalov $[0, 1]$, $(0, 1)$, $[0, 1)$. Velja tudi, da sta $(-1, 1)$ in \mathbb{R} homeomorfna, kar pokaže naslednja preslikava:

$$f(x) = \frac{x}{1 - |x|}.$$

Preslikava je homeomorfizem, saj ima zvezen inverz $f^{-1}(x) = \frac{x}{1+|x|}$

Noben izmed intervalov $(0, 1)$ in $[0, 1)$ ni homeomorfen $[0, 1]$, saj je slednji kompakten, slika kompaktne množice pod zvezno funkcijo je kompaktna, noben izmed $(0, 1)$ ter $[0, 1)$ pa ni kompakten.

Sta morda $(0, 1)$ in $[0, 1)$ homeomorfna? Denimo, da sta ter je $f(0) = a$. Potem moramo homeomorfno preslikati $(0, 1)$ v $(0, a) \cup (a, 1)$. $(0, 1)$ je *povezana s potmi*, med tem ko $(0, a) \cup (a, 1)$ ni, kar bomo v prihodnje pokazali, da je protislovno.

Pri dokazovanju da prostora nista homeomorfna se osredotočimo na iskanje lastnosti, ki jo ima le en prostor, obenem pa se ta lastnost ohranja pod homeomorfizmom.

Topološka lastnost je lastnost prostora, ki se ohranja pri homeomorfizmih. Povezanost in kompaktnost sta topološki lastnosti, omejenost in polnost pa nista topološki lastnosti.

Definicija 3.4

- $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ je enotska n krogla.
- $\mathring{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$ je odprta enotska n krogla.
- $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ je enotska sfera.

Primer 3.5

$\mathring{B}^n \cong \mathbb{R}^n$. Homeomorfizem je namreč:

$$f(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{1 - \|\vec{x}\|}$$

Primer 3.6

$S^n \setminus \{t\} \cong \mathbb{R}^n$, kjer je t poljubna točka S^n . Žarki, definirani z točko t ter poljubno od t različno točko na S^n sekajo ekvator kroglo B^n v točno definirani točki. Funkcija je zvezna, prav tako je tudi njen inverz zvezen - majhne spremembe v argumentu dajo majhne spremembe v funkcijskih vrednostih.

Formalno podamo homeomorfizem kot: $f : S^n \setminus \{(0, \dots, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^n$, kjer je

$$f(x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{(x_1, \dots, x_n)}{1 - x_{n+1}},$$

ter je inverz $f^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow S^n \setminus \{(\vec{0}, 1)\}$ podan s predpisom

$$f^{-1}(\vec{x}) = \left(\frac{2\vec{x}}{\|\vec{x}\| + 1}, \frac{\|\vec{x}\| - 1}{\|\vec{x}\| + 1} \right)$$

Primer 3.7

Denimo, da je f homeomorfizem med \mathbb{R}^2 in \mathbb{R} . Naj bo $f(0, 0) = a$. Protislovje po povezanosti s potmi.

Trditev 3.8

Restrikcija zvezne funkcije je zvezna.

4 Baze in podbaze

Definicija 4.1

Družina $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}(X)$ je *predbaza* za topologijo na X , če velja, da je $\cup_{S \in \mathcal{P}} S = X$.

Predbazo definiramo, saj je topologija generirana s predbazo tista topologija, ki jo dobimo z dodajanjem pogojev v definiciji topološkega prostora predbazi.

Definicija 4.2

$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ je *baza* za topologijo na X , če:

- \mathcal{B} je *predbaza* (unija elementov \mathcal{B} pokrije X).
- Za poljubni množici $U, V \in \mathcal{B}$ in poljubno točko $x \in U \cap V$ obstaja takšna množica $W \in \mathcal{B}$, da je $x \in W \subset U \cap V$.

Trditev 4.3

Za poljubno množico X velja:

- Če je \mathcal{B} baza za topologijo na X , potem je $\mathcal{T} = \{\cup \mathcal{U} \mid \mathcal{U} \subset \mathcal{B}\}$ topologija na X , ki jo imenujemo topologija generirana z \mathcal{B} . Le-ta je najmanjša med vsemi topologijami na X v katerih so vsi elementi baze \mathcal{B} odprti. $U \in \mathcal{B}$ je odprta v tej topologiji, natantko tedaj, ko za vsak $x \in U$ obstaja množica $V \in \mathcal{B}$, da je $x \in V \subset U$.
- Če je \mathcal{P} predbaza za topologijo na X , potem je

$$\mathcal{B} = \{\cap \mathcal{U} \mid \mathcal{U} \subset \mathcal{P}, \mathcal{U} \text{ neprazna in končna}\},$$

baza za topologijo na X , ki jo imenujemo baza generirana s predbazo \mathcal{P} . Topologija generirana z bazo \mathcal{B} je *najmanjša* med vsemi topologijami na X vsebujoč elemente \mathcal{P} .

Definicija 4.4

Naj bo X topološki prostor. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ je *baza* X , če je baza za topologijo na X in če je topologija prostora X enaka topologiji, generirani z bazo \mathcal{B} . $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(X)$ je *podbaza topološkega prostora* X , če je predbaza za topologijo na X in je topologija X enaka topologiji, generirani s podbazo \mathcal{B} .

Primer 4.5

- Na realni premici odprti intervali tvorijo bazo.
- V vsakem metričnem prostoru odprte krogle sestavljajo bazo za topologijo, ki jo inducira metrika.

Trditev 4.6

Naj bo $f : X \rightarrow Y$ prelikava med topološkima prostoroma ter \mathcal{B} baza prostora X in \mathcal{P} podbaza Y .

- Preslikava f je *vezna* natanko tedaj, ko je $f^{-1}(V)$ odprta v X za vsako množico V iz \mathcal{P} .
- Preslikava f je *odprta* natanko tedaj, ko je $f(U)$ odprta v Y za vsako množico U iz \mathcal{B} .

5 Konstrukcije topoloških prostorov

5.1 Produktna topologija

Definicija 5.1

Naj sta X in Y topološka prostora. *Produktna topologija* na množici $X \times Y$ je topologija generirana z bazo

$$\{U \times V \mid U \in \mathcal{P}(X), V \in \mathcal{P}(Y), \text{ kjer sta } X \text{ in } Y \text{ odprti.}\}$$